数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 245-251

未定パラメータを含む常微分方程式の取り扱いについて – 動力学的設計問題への応用 –

沢田浩之
HIROYUKI SAWADA
産業技術総合研究所
NATIONAL INSTITUTE OF ADVANCED INDUSTRIAL SCIENCE AND TECHONOLOGY *

Abstract

機械システム等の設計では、振動などの動力学的特性の評価は欠かせない。本稿では、好ましい動力学的特性が得られるように設計パラメータ値を決定するための方法の1つとして、未定設計パラメータを含む常微分方程式の取り扱いについて考察する。

1 はじめに

機械設計などの現実世界の問題を制約充足問題として定式化し、これを汎用的な制約解消手法を用いて解決するという方法は、これまでに数多く研究されてきている [1, 6, 7]。著者らもまた、この研究アプローチにのっとり、新たな代数制約解消手法を提案し、それらを初期設計支援プロトタイプシステム DeCoSolver として統合した [3, 4, 5]。そこで扱われている制約条件は代数方程式もしくは不等式として表現可能なものであり、幾何学的、静力学的、そして準静的条件がこれに当たる。しかしながら、現実の機械設計問題では、動力学的条件が要求仕様として与えられることが少なくない。そのような問題を解決するためには、代数式のほかに微分演算子を含んだ式を取り扱うことのできる制約解消手法が必要となる。

本稿では、代数式のほかに微分演算子を含んだ条件式を対象とする制約解消手法を構築するための前段階として、未定パラメータを含んだ常微分方程式の取り扱いに関する考察を行う。次章では、まず、静力学的・準静的条件と動力学的条件との違いについて述べる。第3章では、未定パラメータを含む常微分方程式の取り扱い手法に対する要求事項を明らかにしたのち、Taylor 級数展開を応用した手法を提案する。第4章では、例題として減衰振動系の設計パラメータ値決定問題を取り上げる。

2 静力学的・準静的条件と動力学的条件

静力学的・準静的条件と動力学的条件は以下のように区別される。

静力学的・準静的条件 力の釣合いのみを表現する。

動力学的条件 力の釣合いおよび加速度運動を表現する。

例を図1に示す。これは立方体を把持する2本指ロボットであり、その指先は x 軸方向に移動するものとする。このとき考慮すべき条件は次のようになる。指先について考えると、y 軸方向へは移動しないので立

*h.sawada@aist.go.jp

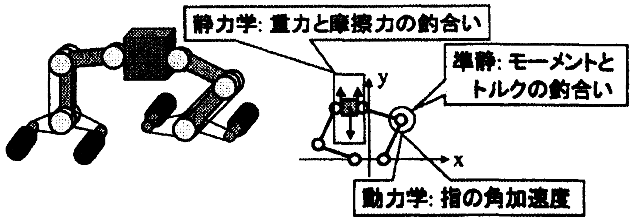

図 1: 静力学的・準静的条件と動力学的条件

方体に働く重力と指先との摩擦力は釣合うことになり、これは静力学的条件となる。各関節では回転運動が生じる。x 軸方向の移動速度もしくは指の慣性モーメントが極めて小さいと仮定すると、そこでは時々刻々のモーメントとトルクの釣合いのみを考えればよく、これは準静的条件となる。一方、その移動速度あるいは指の慣性モーメントが無視できない場合には、関節の回転に関する運動方程式を考慮する必要があり、これは動力学的条件となる。

動力学的条件が要求仕様として与えられる設計問題の例を図 2 に示す。この図は物体を把持した 2 本指ロボットが外乱を受けたのちに安定状態に至るまでの様子を示している。要求仕様として与えられる条件は、「指定された外乱力に対して、指定された時間内に安定すること」である。現実の問題では、このような形で与えられた動力学的条件を考慮しなくてはならない場合が少なくない。

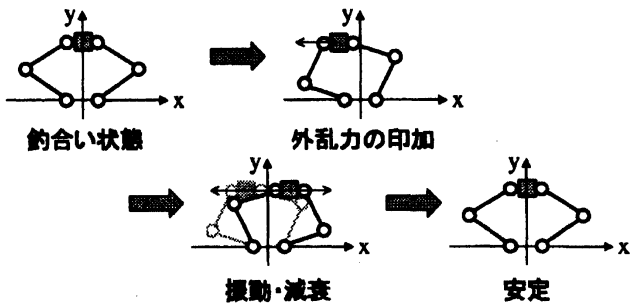

図 2: 動力学的要求仕様

このような設計問題を解く場合、まず、式 (1) のような運動方程式を記述する。

$$[M]\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} + [C]\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + [K]\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

ただし、t、$\boldsymbol{x}$、$[M]$、$[C]$、$[K]$ はそれぞれ時間、変位ベクトル、慣性行列、粘性行列、剛性行列を表す。運動方程式 (1) の解 $\boldsymbol{x}$ が与えられた条件を満足するように $[M]$、$[C]$、$[K]$ を定めるのがこの設計問題を解くということであり、それは通常以下の手順で行われる。

1. ロボットの構造を定める。$[M]$ が定まる。

2. 過去の知識や経験に基づき、減衰器やアクチュエータを選択・配置する。$[C]$、$[K]$ が定まる。

3. 配置された減衰器やアクチュエータの質量・位置に基づき、$[M]$ の値を修正する。

4. 運動方程式 (1) の解を求め、安定性の解析を行う。

5. 与えられた条件を満足していれば、それで $[M]$、$[C]$、$[K]$ を決定する。そうでない場合、ステップ1もしくは2へ戻り、違う $[M]$、$[C]$、$[K]$ を試みる。

設計作業の効率を向上させ、より質の高い設計解を得るためには、このような試行錯誤に代わる見通しのよい設計手法が必要である。未定パラメータを含む常微分方程式の取り扱い手法を確立し、それに基づいた新しい設計手法を提案することが本研究の目的である。

3 Taylor 級数展開の応用

本研究に当たって以下の条件を設定し、その範囲内で未定パラメータを含む常微分方程式の取り扱い手法の確立を目指す。

前提条件 一般に微分方程式の厳密解を求めることはできない。

取り扱い手法に対する要求事項 線形／非線形、斉次／非斉次に関わらず扱い可能であること。

当手法の活用場面および求められるアウトプット 例えば、機械設計の初期段階といった、未定パラメータ値の決定場面における活用を想定する。したがって求められるアウトプットは、未定パラメータ、独立変数、従属変数の相互依存関係を示す情報である。本稿では、この情報をグラフとして提示するものとする。

以上の条件を満足するものとして、ここでは Taylor 級数展開を応用した手法を提案する。常微分方程式および初期条件が以下のように与えられているものとする。

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0, x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \tag{3}$$

ただし、λ_i $(1 \leq i \leq m)$ は未定パラメータ、$x^{(j)}$ は d^jx/dt^j を示す。これに対する級数解は式 (4) で与えられる。

$$x_s(t) = \sum_{k=0}^{s} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k. \tag{4}$$

式 (2) の微分を k 回繰り返すと連立方程式 (5) が得られるので、式 (2)、(3)、(5) を連立させることにより、任意の s について級数解を求められる。

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n+1)}) &= 0, \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ f_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n+k)}) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

次に、級数解の収束判定条件、すなわち、適切な s の値の求め方について論じる。本稿で求めるアウトプットは、変数間の相互依存関係を示すグラフである。したがって以下を主張することができる。

- 対象とする領域は有界（グラフの表示領域）としてよい。
- グラフ解像度以下の精度は不要である。

これにより、本稿では、表示範囲の端点における x の変動幅が解像度以下であれば、級数解は収束したものとみなすことにする。

級数解の収束判定条件

表示範囲を $\lambda_i \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+]$、$t \in [t^-, t^+]$、$x \in [x^-, x^+]$、解像度 r を $(x^+ - x^-)/d$ としたとき（d は画面分割数)、すべての端点 $[\lambda_1^\pm, \ldots, \lambda_m^\pm, t^\pm]$（複合任意）において $|x_s - x_{s-1}| < r$ が満足されれば、級数解は x_s で収束したものとみなす。

4 例題

本稿で提案する手法を評価するために、例題として、運動方程式 (6)、初期条件 (7) で与えられる減衰振動系の設計問題を考える。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{6}$$

$$x|_{t=0} = 1,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

問題 質量 m が与えられたとき、整定時間が 5 秒以内となるように減衰定数 c および弾性定数 k の値を定めよ。

整定時間とは、制御系において、独立変数や操作条件を変化させ始めてから制御量が制御点近傍帯の中に入ってしまうまでに要する時間を指す [2]。この例題では、x の値が初期値の ±5% 以内に収まるまでの時間とする。

ここでは簡単のため m を単位質量（1 [kg]）とし、グラフ表示範囲を以下のように定める。

グラフ表示範囲

- $1/2 \le c \le 2$ [N/(m/s)]
- $1/2 \le k \le 2$ [N/m]
- $0 \le t \le 10$ [s]
- $-2 \le x \le 2$ [m]

未定パラメータ c および k の値は以下の手順で求められる。

未定パラメータ値の決定手順

1. 画面分割数として 4、8、16、32、64、128 の各値を試行し、級数解 $x_s(c, k, t)$ を計算する。
2. いくつかの (c, k) について解析解との比較を行い、収束性を評価する。
3. 適切に収束している級数解を用いて、整定時間 5 秒以内となる (c, k) の領域をグラフとして求める。その領域の中の任意の点が求める (c, k) の値を示している。

図 3 から 5 に収束性の評価結果を示す。この例題の場合、画面分割数が 16 以上であれば充分な収束性を示すことがわかる。

次に、整定時間が 5 秒以内となるような (c, k) の領域をグラフとして求める。この条件は、式 (8) として表現される。

$$\forall(t \ge 5)\{-0.05 \le x_s(c, k, t) \le 0.05\} \tag{8}$$

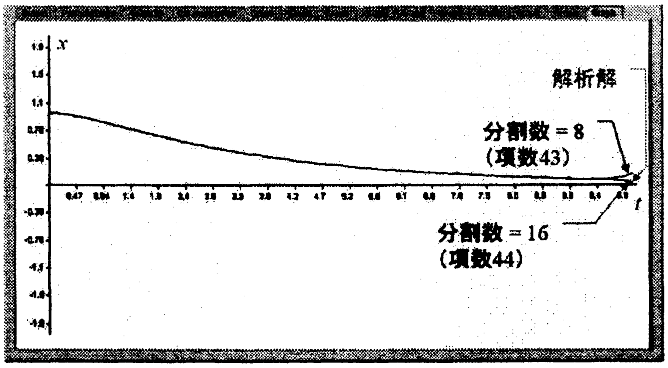

図 3: 級数解の収束 ($c = 2, k = 1/2$)

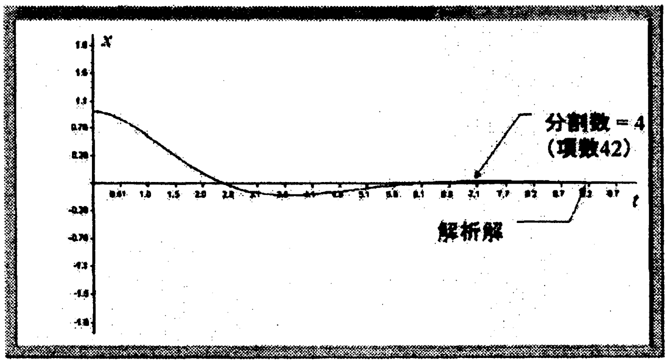

図 4: 級数解の収束 ($c = 1, k = 1$)

式 (8) に対して Quantifier Elimination を施して t を消去すれば、未定パラメータ c および k が満足すべき条件式を得ることができる。

図 6 に、式 (8) を満足する未定パラメータ (c, k) の領域を示す。この図は画面分割数 128 のときの級数解を用いて得られたものである。なお、この図は Quantifier Elimination を適用して得られたものではなく、t の値を少しずつ変化させて得られたグラフを重ね合わせて得たものであることを断っておく[1)]。ハッチングでされた範囲は、整定時間が 5 秒以内にはならない領域を示す。また、図中で精度保証範囲と記された矩形領域は、この例題において想定した c および k の表示範囲を示す。図 6 は、この矩形領域内のハッチングされていない範囲から (c, k) を選べば、整定時間が 5 秒以内となることを示している。

5 おわりに

動力学的設計問題の解決を支援するために、未定パラメータを含む常微分方程式を扱うために Taylor 級数展開を応用する方法を提案した。そして、簡単な例題として減衰振動系の設計問題を取り上げ、提案する方法に実応用の可能性があることを示したが、この研究はまだ端緒についたばかりであり、課題は多い。

課題として第一に挙げられるのが、収束判定の妥当性である。ここではアウトプットをグラフ出力に限定

[1)] QEPCAD (`http://www.cs.usna.edu/~qepcad/B/QEPCAD.html`) を用いてみたが、答えが得られなかった。

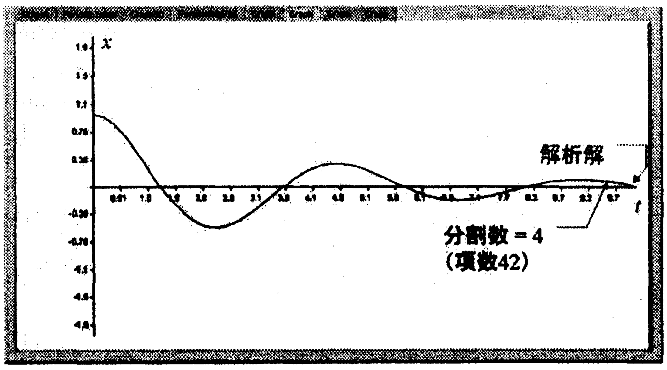

図 5: 級数解の収束 ($c = 1/2, k = 2$)

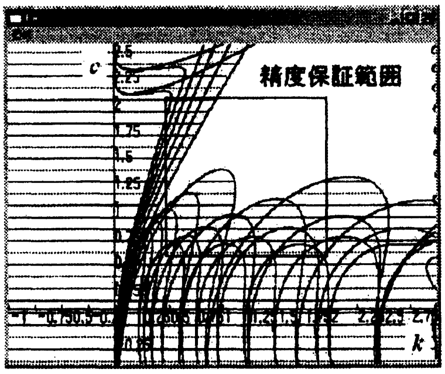

図 6: 未定パラメータ ($c = 1/2, k = 2$) の選択可能範囲 (分割数 128)

し、その端点における値の収束を以って級数の収束とした。本稿で取り上げた例題では特に問題はなかったものの、一般的な妥当性が示されたわけではない。さらに言えば、現実的に意味のある時間・資源の範囲内で級数解が収束するための条件についても、今のところ不明である。これらについての理論的、実験的な検証が必要であるのは言うまでもない。

また、上述のような技術的課題のほかに、応用上の問題点もある。本研究は動力学的設計問題への応用を目的としてはいるものの、その分野には長年に渡って積み重ねられてきた設計手法、設計技術が存在する。従来の手法や技術が基本的に試行錯誤に基づく見通しの悪い方法であることは認識されているが、それゆえに、その欠点を補うための優れたツールも数多く開発されている。これら既存手法に取って代わるとは言わないまでも、広く世の中で使われていくためには、既存手法との明確な差別化を図り、その存在意義と利点を強く主張することが必要である。例えば、既存手法では対応が極めて困難な分野を見つけ出し、それらとの使い分けを具体的に示すことなどが求められるだろう。

参 考 文 献

[1] Bowen, J. and Bahler, D.: Frames, Quantification, Perspectives, and Negotiation in Constraint Networks for Life-Cycle Engineering, *AI in Engineering*, **7**(4), 1992, 199–226.

[2] マグローヒル科学技術用語大辞典第 3 版, 日刊工業新聞社, 1998.

[3] Sawada, H. and Yan, X.-T.: Application of Gröbner Basis and Quantifier Elimination in Engineering Design: An Introduction for Engineers, *Computer Mathematics (Proc. of ASCM 2001)*, Lecture Note Series on Computing, **9**, 2001, 141–150.

[4] 沢田浩之, Yan, X.-T.: 制約ベース型初期設計支援システム, 数式処理, **8**(2), 2001, 19–35.

[5] 沢田浩之: 多項式制約間の矛盾検出法, 数式処理, **9**(4), 2003, 36–51.

[6] Thornton, A. C. and Johnson, A. L.: CADET: A Software Support Tool for Constraint Processes in Embodiment Design, *Research in Engineering Design*, **8**(1), 1996, 1–13.

[7] Young, R. E., Greef, A. and O'Grady, P.: SPARC: An Artificial Intelligence Constraint Network System for Concurrent Engineering, *AI in Design '91* (Gero, J. S. ed.), Butterworth–Heinemann Ltd., 1991, 79–94.